

Titel

ENKELE OPMERKINGEN OVER DE DANCOFF-FACTOR

FYS-LWR-89-11

Auteur(s)

A.J. Janssen

ECN memo's zijn werkrapporten en kunnen te allen tijde uitgebreid, veranderd of teruggenomen worden. Zij zijn uitsluitend bestemd voor gebruik binnen het ECN.

| <u>INHOUD</u> | <u>Blz.</u> |
|--|-------------|
| 1. INLEIDING | 5 |
| 2. RESONANTIE-ZELFAFSCHERMING ZONDER DANCOFF CORRECTIE | 6 |
| 3. ZELFAFSCHERMING MET DANCOFF CORRECTIE | 9 |
| 4. DE DANCOFF FACTOR IN CYLINDERGEOMETRIE | 12 |
| 5. DE DANCOFF FACTOR IN BOLGEOMETRIE | 13 |
| APPENDIX: BOTSINGSKANSEN IN BOLGEOMETRIEËN | 15 |
| TABEL | 18 |
| FIGUREN | 19 |

1. INLEIDING

In het kader van een onderzoekje naar de toepassing van zogenaamde spher-pac brandstof in LWR's bestond behoefte aan Dancoff factoren voor bol-geometrieën. Omdat deze bij het ECN blijkbaar niet in één of andere vorm voorhanden waren, moest ik ze zelf berekenen. In dit memo worden de formules afgeleid; ter inleiding worden enkele meer algemene opmerkingen gemaakt over Dancoff factoren, welke ook gelden voor andere geometrieën (slab en cylinder).

2. RESONANTIE-ZELFAFSCHERMING ZONDER DANCOFF CORRECTIE

De Dancoff factor is een correctiefactor die wordt ingevoerd bij de berekening van de resonantie-zelfafscherming in heterogene systemen. Alvorens deze factor in te voeren, kijken we naar een enkelvoudige absorber-lump, omringd door een groot moderatorgebied. Voor zo'n systeem wordt de neutronenflux in een resonantie berekend met behulp van de transportvergelijking in zijn integrale vorm:

$$\Sigma_{tf}(E) V_f \psi_f(E) = P_{\underline{f}\underline{f}}(E) V_f S_f(E) + P_{\underline{m}\underline{f}}(E) V_m S_m(E) \quad (1a)$$

$$\Sigma_{tm} V_m \psi_m(E) = P_{\underline{f}\underline{m}}(E) V_f S_f(E) + P_{\underline{m}\underline{m}}(E) V_m S_m(E) \quad (1b)$$

Σ_{ti} = totale werkzame doorsnede in gebied i

V_i = volume van gebied i

S_i = bronsterkte (ten gevolge van downscattering van hogere energieën naar E)

f = absorber-gebied

m = moderatorgebied

$P_{\underline{i}\underline{j}}$ = eerste botsingskans, dat wil zeggen, de kans dat neutronen, homogeen isotroop gecreëerd in gebied i, voor het eerst botsen in gebied j

ψ_i = plaatsgemiddelde flux in gebied i

Mede door de plaatsdiscretisatie is vergelijking (1) een benadering. De benadering houdt in dat verondersteld wordt dat per gebiedje de strooiingsbron $S_i(E)$ homogeen en isotroop is (ten aanzien van de flux $\psi_i(E)$ vindt geen benadering plaats!). Naarmate de resonantie smaller is, wijkt deze benadering steeds minder van de werkelijkheid af.

Vroeger werd veel van de Narrow Resonance (NR) benadering gebruik gemaakt omdat dan de bron $S_i(E)$ een heel eenvoudige gedaante krijgt (hij wordt dan onafhankelijk van E). In NITAWL is, voor het unresolved gebied, ook de NR benadering geprogrammeerd (waar wij overigens met de CSRL en JEF bibliotheken geen gebruik van maken); in het resolved gebied kan NITAWL, met de Nordheim methode, $S_i(E)$ wel netjes uitrekenen door met zeer kleine energiestapjes door de resonantie te wandelen.

Voor de eerste botsingskansen gelden de volgende relaties:

$$P_{\underline{f}\underline{f}} + P_{\underline{f}\underline{m}} = 1 \quad (2a)$$

$$P_{\underline{m}\underline{f}} + P_{\underline{m}\underline{m}} = 1 \quad (2b)$$

$$P_{\underline{f}\underline{m}} V_f \Sigma_{tf} = P_{\underline{m}\underline{f}} V_m \Sigma_{tm} \quad (2c)$$

zodat slechts één van de vier kansen expliciet hoeft te worden berekend, bijvoorbeeld $P_{\underline{f}\underline{m}}$, de eerste botsings-ontsnapkans uit de absorber lump. Zo doet NITAWL het ook: voor de drie geometriën (slab, cylinder, bol) zijn nauwkeurige formules voorhanden voor $P_{\underline{f}\underline{m}}$ als functie van Σ_{tf} .

Voorbeeld: voor een plaatvormige absorber met dikte a geldt:

$$P_{\underline{f}\underline{m}}(E) = \frac{0.5 - E_3(a\Sigma_{tf}(E))}{a\Sigma_{tf}(E)} \quad (3)$$

met E_3 de exponentiële integraal van de derde orde:

$$E_3(x) = \int_0^1 t e^{-x/t} dt = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^3} dt. \quad (4)$$

Vroeger werd veel gebruik gemaakt van een rationele approximatie voor $P_{\underline{f}\underline{m}}(E)$:

$$P_{\underline{f}\underline{m}}(E) \approx \frac{1}{\frac{\bar{l} \Sigma_{tf}(E)}{A} + 1} \quad (5)$$

waarin \bar{l} de gemiddelde koordelengte van de absorberlump is en A de zogenaamde Bell factor. Als A als een constante mag worden opgevat blijkt dat met (5) het effect van de heterogeniteit op de resonantie-zelfafscherming volledig equivalent is met het effect van de toevoeging van strooiend verdunningsmateriaal aan een (oneindig groot) homogeen medium met dezelfde absorber-samenstelling; per absorberatoom heeft deze verdunner een strooiingswerkzame doorsnede σ_{esc} gelijk aan

$$\sigma_{esc} = \frac{A}{\bar{l} N_f} \quad (6)$$

waarin N_f de atoomdichtheid van de absorber is.

Als NITAWL voor het unresolved gebied zelfafscherming moet uitrekenen, maakt hij gebruik van de rationele approximatie (5) en de equivalentierelatie (6). Helaas is de Bell factor A niet echt constant maar varieert met $\bar{l} \Sigma_{tf}(E)$ tussen 1 en circa 1.8. In de beschrijving van NITAWL wordt de factor A niet genoemd en wordt impliciet gesuggereerd dat A altijd gelijk aan 1 zou zijn, hetgeen in het algemeen niet de beste keuze voor A is.

3. ZELFAFSCHERMING MET DANCOFF CORRECTIE

We bekijken nu de situatie dat we niet te maken hebben met een enkelvoudige absorber maar met een (regelmatig en oneindig) rooster bestaande uit identieke absorberlumps omgeven door moderatormateriaal. We kunnen nog steeds gebruik maken van vgl. (1) om de fluxen $\psi_f(E)$ in de identieke absorberlumps en $\psi_m(E)$ in de moderator te berekenen, zij het dat de botsingskansen er iets anders uitzien. Ze bestaan nu uit sommaties, bijvoorbeeld voor een rooster met splijtstofstaven geldt nu (zie fig. 1):

$$P_{f \rightarrow f}^* = \sum_{i=1}^{\infty} P_{i \rightarrow n} = \sum_{i \neq 1}^{\infty} P_{n \rightarrow i} \quad (7)$$

waarin $P_{i \rightarrow n}$ weer de kans is dat neutronen, homogeen en isotroop gecreëerd in lump i , voor het eerst botsen in lump n .

Voor een regelmatig plaatvormig rooster vinden we (zie fig. 2):

$$P_{n \rightarrow n} = 1 - \frac{0,5 - E_3(\lambda_f)}{\lambda_f} \quad (8)$$

$$P_{n+i \rightarrow n} = \frac{E_3(|i| \cdot \lambda_t - \lambda_f) - 2E_3(|i| \cdot \lambda_t) + E_3(|i| \cdot \lambda_t + \lambda_f)}{2\lambda_f} \quad (i \neq 0) \quad (9)$$

$$P_{f \rightarrow m}^* = 1 - \sum_{i=-\infty}^{\infty} P_{n+i \rightarrow n} = \frac{0,5 - E_3(\lambda_f)}{\lambda_f} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_3(i\lambda_t - \lambda_f) - 2E_3(i \cdot \lambda_t) + E_3(i \cdot \lambda_t + \lambda_f)}{\lambda_f} \quad (10)$$

De correctie die $P_{f \rightarrow m}^*$ uit vgl. (3) moet ondergaan bestaat dus uit de gesommeerde reeks in vgl. (10). Dergelijke correcties werden (en worden) te ingewikkeld gevonden voor zelfsafscherminingsberekeningen (die uiteraard een zeer snel algoritme moeten hebben). De mogelijkheid tot een rationele approximatie voor $P_{f \rightarrow m}^*$ lijkt door deze correctie ook verloren te gaan.

Daarom heeft men zijn toevlucht gezocht tot een benadering van de transportvergelijking, het zogenaamde "invariant embedding" principe. Dit principe wordt ook toegepast in de celcode RABBLE (en, naar alle waarschijnlijkheid, eveneens in ROLAIDS). Met deze techniek kan een forse reductie in rekentijd bereikt worden. Het blijft echter een benadering van de correcte transportvergelijking en kan soms tot onverwachte onnauwkeurigheden leiden.

Het principe is het gemakkelijkst te beschrijven voor een plaatvormig rooster (zie fig. 2). Neutronen, homogeen en isotroop ontstaan in lump n, hebben een kans $P_{\vec{n}\vec{n}}$ volgens vgl. (8) om voor het eerst in n te botsen en dus een kans $\frac{1}{2} (1 - P_{\vec{n}\vec{n}})$ om ongebotst het rechter scheidingsvlak van n te passeren. Nu berekenen we de kans T_m dat deze laatste neutronen ongebotst de moderatorzone oversteken en de volgende fuel lump bereiken. Hierbij maken we de essentiële veronderstelling dat deze neutronen bij het verlaten van lump n een isotrope verdeling hebben. [In werkelijkheid is de verdeling anisotroop; $\psi(\alpha) \sim 1 - \exp(-\frac{a \Sigma_t(E)}{\cos \alpha})$, met α de hoek die de neutronen maken met de normaal op het scheidingsvlak; alleen voor grote waarden van $a \Sigma_t(E)$ is de flux redelijk isotroop].

Met deze veronderstelling is T_m makkelijk te berekenen:

$$T_m = \frac{\int_0^{\pi/2} \sin \alpha \cos \alpha e^{-\lambda_m / \cos \alpha} d\alpha}{\int_0^{\pi/2} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha} = \frac{\int_0^1 \cos \alpha e^{-\lambda_m / \cos \alpha} d(\cos \alpha)}{\frac{1}{2}} = 2 E_3(\lambda_m) \quad (11)$$

Voor lump n + 1 gaan we op dezelfde manier te werk. Van de niet in de moderator gebotste neutronen veronderstellen we dat ze isotroop arriveren en dus een kans T_f hebben om lump (n+1) ongebotst over te steken gelijk aan

$$T_f = 2 E_3(\lambda_f) \quad (12)$$

De kans dat ze wel in (n+1) botsen is $1 - T_f$. Zo doorgaande ontstaat voor de kans dat neutronen, ontstaan in n, voor het eerst in één van de absorber lumps botsen de volgende sommatie:

$$P_{\vec{f}\vec{f}}^* = P_{\vec{n}\vec{n}} + (1 - P_{\vec{n}\vec{n}}) T_m (1 - T_f) + (1 - P_{\vec{n}\vec{n}}) T_m^2 T_f (1 - T_f) + \dots$$

$$= P_{\vec{n}\vec{n}} + \frac{(1 - P_{\vec{n}\vec{n}}) T_m (1 - T_f)}{1 - T_m T_f} = 1 - P_{\vec{f}\vec{f}} + \frac{P_{\vec{f}\vec{m}} T_m (1 - T_f)}{1 - T_m T_f} \quad (13)$$

en de eerste botsings ontsnapkans $P_{\vec{f}\vec{m}}^*$ wordt

$$P_{\vec{f}\vec{m}}^* = 1 - P_{\vec{f}\vec{f}}^* = P_{\vec{f}\vec{m}} \frac{1 - T_m}{1 - T_m T_f} \quad (14)$$

Gebruikelijk is om de Dancoff factor C te definiëren volgens

$$C = T_m \quad (15)$$

Meer in het algemeen (voor willekeurige geometrieën): de Dancoff factor is de kans dat neutronen, isotroop vrijkomend uit een absorber lump, één van de omringende absorber lumps bereiken zonder te botsen in de tussenliggende moderator.

Tussen T_f en $P_{\rightarrow\rightarrow f_m}$ bestaat een relatie. Uit (3) en (12) volgt dat:

$$T_f = 1 - \bar{l} \Sigma_{tf} P_{\rightarrow\rightarrow f_m} \quad (16)$$

Deze relatie geldt niet toevallig alleen voor slabgeometrie, maar blijkt voor elke willekeurige convexe absorbergeometrie te gelden. Als we (15) en (16) invullen in (14) vinden we tenslotte

$$P_{\rightarrow\rightarrow f_m}^* = \frac{P_{\rightarrow\rightarrow f_m} (1 - C)}{1 - (1 - \bar{l} \Sigma_{tf} P_{\rightarrow\rightarrow f_m}) C} \quad (17)$$

Vgl. (17) is zodanig eenvoudig dat codes als NITAWL ermee overweg kunnen (vgl. (17) wordt ook expliciet vermeld in de beschrijving van NITAWL): behalve Σ_{tf} is de enige grootte die energie-afhankelijk is de ontsnapkans $P_{\rightarrow\rightarrow f_m}$ voor een enkelvoudige absorber, want C is een constante (heeft althans geen resonantie- fijnstructuur).

Wanneer we in (17) de rationale approximatie (5) voor $P_{\rightarrow\rightarrow f_m}$ invullen krijgen we:

$$P_{\rightarrow\rightarrow f_m}^* \approx \frac{1}{1 + \bar{l} \Sigma_{tf} \left(\frac{1}{A} + \frac{C}{1 - C} \right)} \quad (18)$$

en blijkt er weer equivalentie te bestaan tussen het heterogeniteitseffect en verdunning in een homogeen medium, met als verdunningswerkzame-door-snede

$$\sigma_{esc}^* = \frac{1}{\bar{l} N_f \left(\frac{1}{A} + \frac{C}{1 - C} \right)} \quad (19)$$

4. DE DANCOFF FACTOR IN CYLINDERGEOMETRIE

Voor een regelmatig rooster met cilindrische absorberstaven is de Dancoff factor een lastig te berekenen grootte; het is een (numeriek te berekenen) integraal van zogenaamde Bickley functies (die zelf ook weer integralen zijn). Gelukkig hebben anderen dat werk al gedaan. In ANL-5800 staat een uitgebreide tabel van kansen T_m voor neutronen die een cilindrische absorber verlaten om ongebotst een naburige evenwijdig opgestelde identieke absorber te bereiken. De kansen zijn getabelleerd voor een reeks van waarden van twee parameters:

1. $\rho \Sigma_{tm}$, het produkt van de absorberstraal ρ en de werkzame doorsnede Σ_{tm} van de omringende moderator.
2. d/ρ , de verhouding van de afstand d tussen de middelpunten van de twee absorbers en de straal ρ .

Om voor een rooster de Dancoff factor C te bepalen, moeten we kansen T_m sommeren voor alle omgevende absorberstaven voor zover ze in het directe zicht staan. In de praktijk is het voldoende om de meest nabij gelegen absorbers in de sommatie te betrekken. Voor het vierkante rooster uit fig. 1 krijgen we dan een sommatie over 8 T_m waarden.

$$C = 4 T_{m1} + 4 T_{m2} \quad (20)$$

met:

T_{m1} de kans voor absorbers op afstand d ;

T_{m2} de kans voor absorbers op afstand $d\sqrt{2}$.

5. DE DANCOFF FACTOR IN BOLGEOMETRIE

Om de Dancoff factor te bepalen voor een (min of meer) regelmatig rooster van bolvormige absorbers omgeven door moderator definiëren we een equivalente bolvormige eenheidscel met de correcte absorber/moderator volume-verhouding en een isotroop reflecterende buitenwand (white boundary), zie fig. 3. We definiëren de volgende kansen:

- $P_{\rightarrow\rightarrow}^{f_m}$ = de kans voor neutronen, homogeen en isotroop ontstaan in de absorber, om deze ongebotst te verlaten;
 T^{IO} = de kans voor neutronen, isotroop de absorber verlatend, om ongebotst de white boundary te bereiken;
 T^{OI} = de kans voor neutronen, isotroop de white boundary verlatend, om ongebotst de absorber te bereiken;
 T^{II} = de kans voor neutronen, isotroop op de absorber vallend, om deze ongebotst weer te verlaten;
 T^{OO} = de kans voor neutronen, isotroop de white boundary verlatend, om deze weer opnieuw te bereiken zonder botsingen en zonder door de absorber heen te gaan.

We maken weer gebruik van de "invariant embedding" benadering. Voor de kans T_m dat neutronen, de absorber verlatend, deze weer ongebotst bereiken na een willekeurig aantal reflecties aan de white boundary, vinden we

$$T_m = T^{IO} T^{OI} + T^{IO} T^{OO} T^{OI} + T^{IO} T^{OO^2} T^{OI} + \dots = \frac{T^{IO} T^{OI}}{1 - T^{OO}} \quad (21)$$

En geheel analoog aan vgl. (13) en (14) vinden we voor $P_{\rightarrow\rightarrow}^{f_m^*}$, de eerste bostingsontsnapkans

$$P_{\rightarrow\rightarrow}^{f_m^*} = P_{\rightarrow\rightarrow}^{f_m} \frac{1 - T_m}{1 - T_m T^{II}} \quad (22)$$

zodat de Dancoff factor voor bolgeometrieën gelijk is aan

$$C = T_m = \frac{T^{IO} T^{OI}}{1 - T^{OO}} \quad (23)$$

Formules voor de diverse kansen worden in de appendix afgeleid.

De Dancoff factor is van diverse celparameters afhankelijk, maar blijkt te

kunnen worden geschreven als een functie van slechts twee parameters, bijvoorbeeld r_m/r_1 en $\Sigma_{tm} r_1$ met (zie fig. 3)

- r_1 = absorberstraal
- r_m = moderatordikte
- Σ_{tm} = moderator werkzame doorsnede

In tabel 1 is C als functie van deze twee parameters weergegeven. Interessant is dat voor C de volgende rationele approximatie heel redelijk blijkt op te gaan:

$$C \approx \frac{1}{1 + \bar{l}_m \Sigma_{tm}} \quad (24)$$

met \bar{l}_m een soort van gemiddelde koordelengte van de moderator:

$$\bar{l}_m = \frac{4 V_m}{S} = \frac{4 \cdot \frac{4}{3} \pi ((r_1 + r_m)^3 - r_1^3)}{4 \pi r_1^2} = 4 r_m \left(1 + \frac{r_m}{r_1} + \frac{1}{3} \left(\frac{r_m}{r_1}\right)^2\right) \quad (25)$$

APPENDIX: BOTSINGSKANSEN IN BOLGEOMETRIEËN

In deze appendix worden de vijf kansen, gedefinieerd in § 5, afgeleid. We hebben steeds te maken met isotroop vertrekkende neutronen. Vanwege de bolgeometrie hoeven we daarom niet over alle ruimtehoeken te integreren, maar kunnen we volstaan met alleen naar neutronen te kijken die bijvoorbeeld evenwijdig aan de x-as lopen (zie fig. 4). We vinden dan:

$$\begin{aligned}
 1. P_{\rightarrow\rightarrow}^{f_m} &= \frac{\int_0^{r_1} 2\pi y dy \int_0^{2\sqrt{r_1^2 - y^2}} \exp(-t \Sigma_{tf}) dt}{\int_0^{r_1} 2\pi y dy \int_0^{2\sqrt{r_1^2 - y^2}} dt} = \\
 &= \frac{1}{\Sigma_{tf}} \frac{\int_0^{r_1} 2\pi y dy [1 - \exp(-2 \Sigma_{tf} \sqrt{r_1^2 - y^2})]}{\int_0^{r_1} 2\pi y dy [2 \sqrt{r_1^2 - y^2}]} = \\
 &= \frac{1}{\Sigma_{tf}} \frac{\pi r_1^2 - 2\pi \int_0^{r_1} z \exp(-2 \Sigma_{tf} z) dz}{\frac{4}{3} \pi r_1^3} \\
 &= \frac{1}{\bar{l} \Sigma_{tf}} \left[1 - \frac{1}{2 \lambda^2} \{ 1 - (1 + 2\lambda) \exp(-2\lambda) \} \right] \quad (A1)
 \end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned}
 \bar{l} &= \frac{4}{3} r_1 \\
 \lambda &= r_1 \Sigma_{tf}
 \end{aligned}$$

Vgl. (A1) is ook in NITAWL geprogrammeerd.

$$2. T^{II} = \frac{\int_0^{r_1} 2\pi y dy \cdot \exp(-2 \Sigma_{tf} \sqrt{r_1^2 - y^2})}{\int_0^{r_1} 2\pi y dy} \quad (A2)$$

Vergelijking van (A2) met (A1) toont dat de volgende relatie bestaat tussen $P_{\vec{f}_m}$ en T^{II} :

$$\frac{4}{3} \pi r_1^3 \Sigma_{tf} P_{\vec{f}_m} = \pi r_1^2 - \pi r_1^2 T^{II}$$

oftewel

$$T^{II} = 1 - \bar{l} \Sigma_{tf} P_{\vec{f}_m} \quad (A3)$$

de relatie waarvan in § 3 al werd opgemerkt dat hij voor elke willekeurige convexe absorbergeometrie geldt.

$$3. T^{IO} = \frac{\int_0^{r_1} 2 \pi y dy \cdot \exp(-\Sigma_{tm} u)}{\int_0^{r_1} 2 \pi y dy} \quad (A4)$$

$$\text{met } u = \sqrt{r_2^2 - y^2} - \sqrt{r_1^2 - y^2}$$

$$\text{waaruit volgt: } y^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} - \frac{u^2}{4} - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{4u^2} \quad (A5)$$

(A5) invullen in de teller van (A4) levert:

$$T^{IO} = \frac{\int_0^{r_1} \sqrt{r_2^2 - r_1^2} \left(-\frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{u^3} \right) \exp(-\Sigma_{tm} u) du}{r_1^2}$$

$$= \frac{1}{2 r_1^2 \Sigma_{tm}^2} \int_0^{\Sigma_{tm} \sqrt{r_2^2 - r_1^2}} \frac{(-z + \frac{\Sigma_{tm}^4 (r_2^2 - r_1^2)^2}{z^3}) \exp(-z) dz}{\Sigma_{tm} (r_2 - r_1)} \quad (A6)$$

$$\text{Stel } \Sigma_{tm} \sqrt{r_2^2 - r_1^2} = a \text{ en } \Sigma_{tm} (r_2 - r_1) = b \rightarrow$$

$$T^{IO} = \frac{1}{2 r_1^2 \Sigma_{tm}^2} \left[- \int_b^a z \exp(-z) dz + a^4 \int_b^a \frac{e^{-z}}{z^3} dz - a^4 \int_a^\infty \frac{e^{-z}}{z^3} dz \right] \quad (A7)$$

Stel $z_1 = z/b$ en $z_2 = z/a \rightarrow$

$$T^{IO} = \frac{1}{2r_1^2 \Sigma_{tm}^2} \left[-\int_0^a z \exp(-z) dz + \frac{a^4}{b^2} \int_0^1 \frac{e^{-bz_1}}{z_1^3} dz_1 - a^2 \int_0^1 \frac{e^{-az_2}}{z_2^3} dz_2 \right]$$

$$= \frac{1}{2r_1^2 \Sigma_{tm}^2} [a e^{-a} - b e^{-b} + e^{-a} - e^{-b} + \frac{a^4}{b^2} E_3(b) - a^2 E_3(a)] \quad (A8)$$

T^{IO} kan dus berekend worden met behulp van een tabel met E_3 functiewaarden.

$$4. T^{OI} = \frac{\int_0^{r_1} 2 \pi y dy \exp(-\Sigma_{tm} u)}{\int_0^{r_2} 2 \pi y dy} \quad (A9)$$

Vergelijking van (A9) met (A4) toont het volgende verband tussen T^{OI} en T^{IO} :

$$r_2^2 T^{OI} = r_1^2 T^{IO} \quad (A10)$$

$$5. T^{OO} = \frac{\int_0^{r_2} 2 \pi y_1 dy_1 \exp(-2\Sigma_{tm} \sqrt{r_2^2 - y_1^2})}{\int_0^{r_1} 2 \pi y_1 dy_1} = \frac{\int_0^{\sqrt{r_2^2 - r_1^2}} 2 \pi z dz \exp(-\Sigma_{tm} z)}{\pi r_2^2}$$

$$= \frac{1}{2(r_2 \Sigma_{tm})^2} [1 - (1 + 2 \Sigma_{tm} \sqrt{r_2^2 - r_1^2}) \exp(-2 \Sigma_{tm} \sqrt{r_2^2 - r_1^2})] \quad (A11)$$

Tabel 1. De Dancoff factor voor bolgeometrieën als functie van de parameters r_m/r_l en $\Sigma_{tm} r_l$.

| RM/R1 = | .01 | .02 | .04 | .08 | .16 | .32 | .64 | 1.28 | 2.56 | 5.12 | 10.24 |
|----------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| SIGTM*R1 | | | | | | | | | | | |
| .00100 | 1.0000 | .9999 | .9998 | .9997 | .9993 | .9983 | .9955 | .9859 | .9446 | .7663 | .3423 |
| .00120 | 1.0000 | .9999 | .9998 | .9996 | .9991 | .9980 | .9946 | .9831 | .9342 | .7319 | .3025 |
| .00144 | .9999 | .9999 | .9998 | .9995 | .9989 | .9976 | .9936 | .9797 | .9220 | .6943 | .2653 |
| .00173 | .9999 | .9999 | .9997 | .9994 | .9987 | .9971 | .9923 | .9758 | .9078 | .6535 | .2311 |
| .00207 | .9999 | .9998 | .9997 | .9993 | .9985 | .9965 | .9908 | .9711 | .8913 | .6096 | .1985 |
| .00249 | .9999 | .9998 | .9996 | .9992 | .9982 | .9958 | .9889 | .9654 | .8722 | .5654 | .1711 |
| .00299 | .9999 | .9998 | .9995 | .9990 | .9978 | .9949 | .9868 | .9588 | .8501 | .5199 | .1452 |
| .00358 | .9999 | .9997 | .9994 | .9988 | .9974 | .9939 | .9841 | .9509 | .8243 | .4730 | .1241 |
| .00430 | .9998 | .9997 | .9993 | .9985 | .9969 | .9927 | .9810 | .9416 | .7959 | .4265 | .1045 |
| .00516 | .9998 | .9996 | .9992 | .9983 | .9962 | .9913 | .9773 | .9305 | .7647 | .3819 | .0876 |
| .00619 | .9998 | .9995 | .9990 | .9979 | .9955 | .9895 | .9728 | .9173 | .7298 | .3380 | .0733 |
| .00743 | .9997 | .9994 | .9988 | .9975 | .9946 | .9875 | .9675 | .9019 | .6909 | .2968 | .0608 |
| .00892 | .9996 | .9993 | .9986 | .9970 | .9935 | .9850 | .9612 | .8845 | .6502 | .2586 | .0503 |
| .01070 | .9996 | .9991 | .9983 | .9964 | .9922 | .9820 | .9535 | .8644 | .6061 | .2232 | .0413 |
| .01284 | .9995 | .9990 | .9979 | .9957 | .9906 | .9784 | .9445 | .8411 | .5602 | .1911 | .0337 |
| .01541 | .9994 | .9988 | .9975 | .9948 | .9888 | .9741 | .9339 | .8143 | .5127 | .1621 | .0274 |
| .01849 | .9993 | .9985 | .9970 | .9938 | .9866 | .9690 | .9216 | .7846 | .4649 | .1366 | .0220 |
| .02219 | .9991 | .9982 | .9964 | .9925 | .9839 | .9629 | .9073 | .7510 | .4172 | .1140 | .0176 |
| .02662 | .9990 | .9979 | .9957 | .9910 | .9807 | .9556 | .8904 | .7141 | .3704 | .0944 | .0138 |
| .03195 | .9987 | .9975 | .9948 | .9892 | .9768 | .9470 | .8706 | .6735 | .3253 | .0774 | .0108 |
| .03834 | .9985 | .9970 | .9938 | .9871 | .9722 | .9371 | .8483 | .6301 | .2825 | .0628 | .0082 |
| .04601 | .9982 | .9963 | .9925 | .9845 | .9667 | .9253 | .8223 | .5838 | .2425 | .0504 | .0062 |
| .05521 | .9978 | .9956 | .9911 | .9814 | .9601 | .9113 | .7932 | .5355 | .2058 | .0399 | .0045 |
| .06625 | .9974 | .9947 | .9893 | .9777 | .9524 | .8950 | .7601 | .4859 | .1724 | .0312 | .0032 |
| .07950 | .9969 | .9937 | .9871 | .9733 | .9434 | .8762 | .7233 | .4355 | .1426 | .0239 | .0022 |
| .09540 | .9962 | .9924 | .9846 | .9680 | .9327 | .8542 | .6829 | .3855 | .1163 | .0179 | .0015 |
| .11448 | .9955 | .9909 | .9815 | .9616 | .9199 | .8291 | .6390 | .3366 | .0933 | .0131 | .0009 |
| .13737 | .9946 | .9891 | .9778 | .9542 | .9051 | .8005 | .5919 | .2897 | .0735 | .0093 | .0005 |
| .16484 | .9935 | .9869 | .9734 | .9455 | .8878 | .7680 | .5421 | .2454 | .0567 | .0063 | .0003 |
| .19781 | .9922 | .9843 | .9681 | .9352 | .8676 | .7317 | .4904 | .2044 | .0427 | .0041 | .0001 |
| .23738 | .9907 | .9812 | .9617 | .9228 | .8443 | .6914 | .4376 | .1670 | .0313 | .0025 | .0001 |
| .28485 | .9888 | .9774 | .9544 | .9086 | .8177 | .6472 | .3846 | .1336 | .0221 | .0014 | .0000 |
| .34182 | .9866 | .9729 | .9457 | .8918 | .7873 | .5996 | .3323 | .1043 | .0149 | .0007 | .0000 |
| .41019 | .9839 | .9675 | .9354 | .8723 | .7529 | .5488 | .2819 | .0791 | .0096 | .0003 | .0000 |
| .49222 | .9807 | .9611 | .9231 | .8496 | .7145 | .4956 | .2340 | .0580 | .0057 | .0001 | .0000 |
| .59067 | .9768 | .9537 | .9089 | .8237 | .6721 | .4407 | .1897 | .0409 | .0032 | .0000 | .0000 |
| .70880 | .9722 | .9449 | .8921 | .7940 | .6256 | .3852 | .1495 | .0274 | .0016 | .0000 | .0000 |
| .85056 | .9667 | .9344 | .8727 | .7603 | .5756 | .3300 | .1141 | .0173 | .0007 | .0000 | .0000 |
| 1.02067 | .9601 | .9220 | .8501 | .7226 | .5224 | .2764 | .0837 | .0101 | .0003 | .0000 | .0000 |
| 1.22481 | .9526 | .9076 | .8241 | .6806 | .4667 | .2254 | .0586 | .0054 | .0001 | .0000 | .0000 |
| 1.46977 | .9436 | .8906 | .7945 | .6345 | .4095 | .1781 | .0388 | .0026 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 1.76373 | .9328 | .8710 | .7608 | .5844 | .3519 | .1357 | .0240 | .0011 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 2.11647 | .9202 | .8481 | .7230 | .5309 | .2950 | .0990 | .0136 | .0004 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 2.53977 | .9055 | .8218 | .6808 | .4745 | .2403 | .0684 | .0070 | .0001 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 3.04772 | .8881 | .7918 | .6344 | .4161 | .1891 | .0444 | .0032 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 3.65726 | .8681 | .7577 | .5838 | .3568 | .1430 | .0268 | .0013 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 4.38871 | .8448 | .7194 | .5295 | .2980 | .1030 | .0147 | .0004 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 5.26646 | .8180 | .6766 | .4721 | .2413 | .0701 | .0073 | .0001 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 6.31975 | .7874 | .6294 | .4126 | .1883 | .0445 | .0032 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 7.58370 | .7526 | .5780 | .3522 | .1402 | .0261 | .0012 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 9.10044 | .7135 | .5227 | .2924 | .1000 | .0140 | .0004 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |

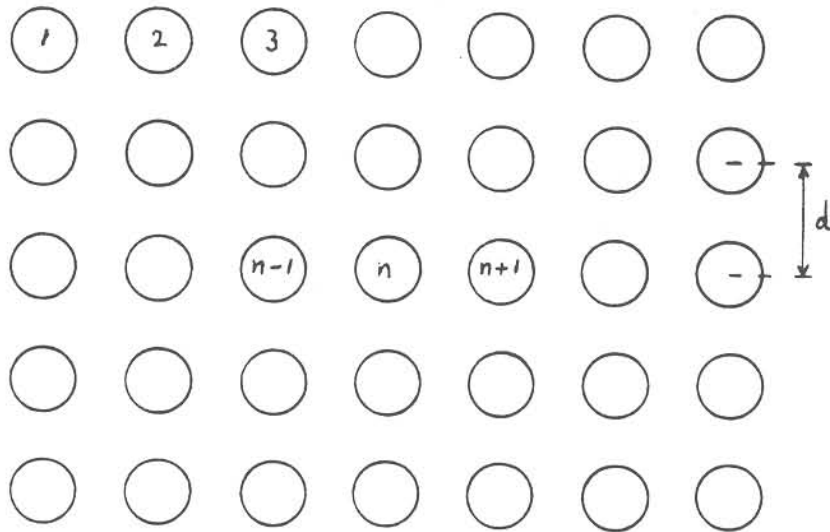


Fig. 1. Regelmatig oneindig rooster met cilindrische absorberstaven

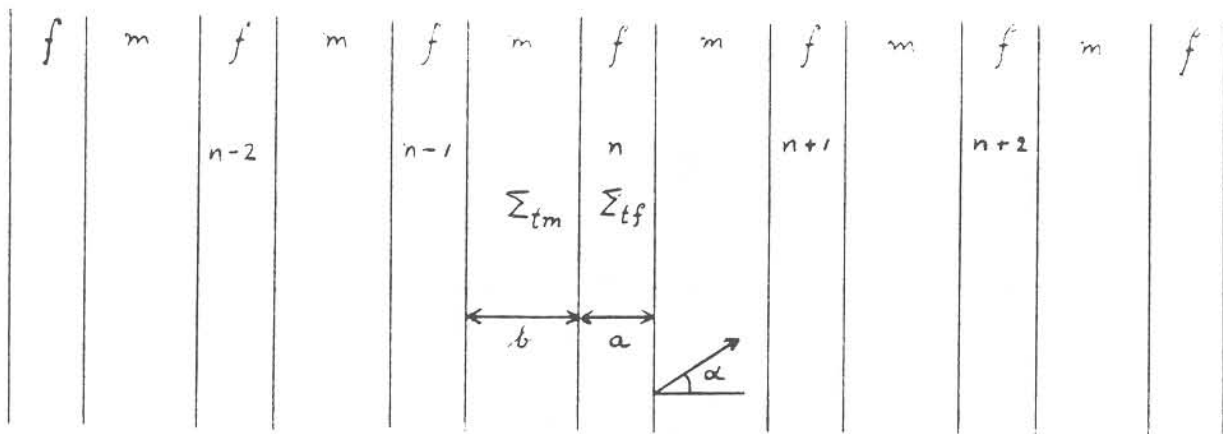


Fig. 2. Plaatvormig regelmatig oneindig rooster

$$\lambda_f = a \Sigma_{tf}; \lambda_m = b \Sigma_{tm}; \lambda_t = \lambda_f + \lambda_m$$

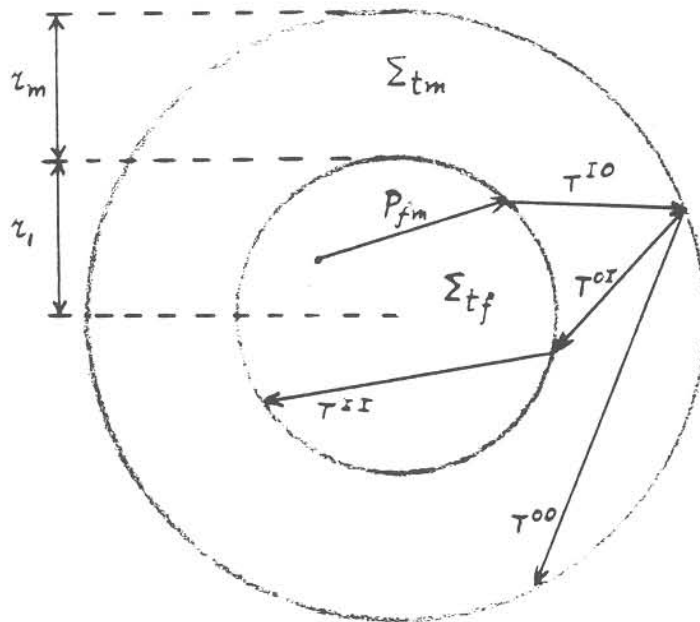


Fig. 3. Doorsnede van de equivalente bolvormige eenheidscel met white boundary. Voor de vijf botsingsontsnapkansen zijn relevante neutronenbanen getekend.

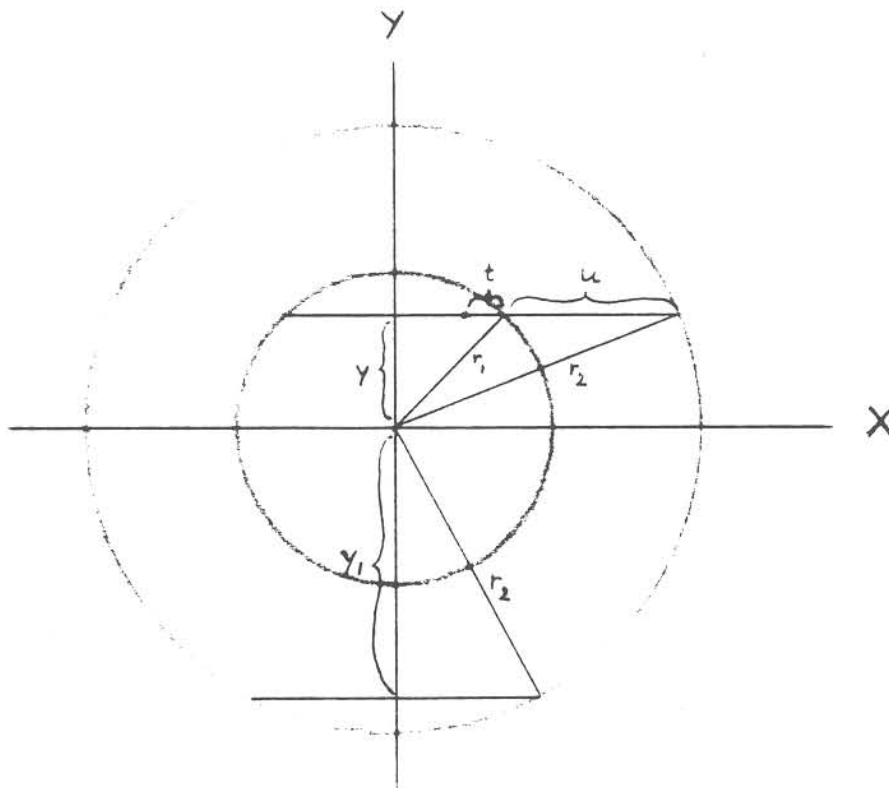


Fig. 4. Diverse afstanden die een rol spelen bij de berekening van de botsingsontsnapkansen.